ゲーム理論とエントロピー解析学(数理計画モデルにおける最適化理論)

AUTHOR(S):

明石, 重男

CITATION:

明石, 重男. ゲーム理論とエントロピー解析学(数理計画モデルにおける最適化理論). 数理解析研究所講究録 1992, 798: 89-96

ISSUE DATE:

1992-08

URL:

http://hdl.handle.net/2433/82802

数理解析研究所講究録
798巻 1992年 89-96

ゲーム理論とエントロピー解析学

湘南工科大学　明石重男 (Shigeo Akashi)

1. 序論

統計力学に於けるカノニカル分布の導出や時系列解析に於ける定常過程のモデル選定等に見られる様に，最大エントロピー原理に基づいて決定される選択の有用性がエントロピー解析学の領域で認識されて以来，エントロピーの極値問題が重要視されてきた．そしてその研究手段として，ゲーム理論に於ける均衡点探索問題の手法を応用する傾向が生じている．しかし一般にエントロピーは非線形性を有するため，この領域の研究手段として，不動点定理を中心とする非線形関数解析学が重要な役割を占めるようになってきた．

本稿は，相対エントロピーの最小化問題に対してNash均衡理論に基づく定式化を与え，その解の存在を多価写像の不動点定理を用いて示す事を目的とする．

2. 相対エントロピー及びその性質

$(\Omega, \mathcal{F})$を可測空間，MをΩ上の確率測度の全体，$P(\mathcal{F})$をΩの有限可測分割の全体とする．この時，$\mu, \nu \in M$に対して，

$$S(\mu | \nu) = \sup\{\Sigma \mu(A) \cdot \log[\mu(A)/\nu(A)]\}$$

で定義される量をμのνに関する相対エントロピーという．但し，上限はΩの有限可測分割全体に渡って取られるものとし，総和は有限可測分割を構成する全ての要素に対して取られるものとする．相対エントロピーに関しては次の性質を有する事が知られている(cf.[1]):

定理2-1(正値性).

$S(\mu | \nu) \geqq 0, \quad \mu, \nu \in M,$

$S(\mu | \nu) = 0$の成立は，$\mu = \nu$の場合のみ．

定理2-2(同時凸性).

任意の確率測度$\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$及び$\alpha_1 + \alpha_2 = 1$を満たす非負数$\alpha_1, \alpha_2$に対して，

$$S(\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 | \alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_2) \leqq \alpha_1 S(\mu_1 | \nu_1) + \alpha_2 S(\mu_2 | \nu_2).$$

が成立する．

Mは全変動ノルム$\|\cdot\|$を導入する事によりBanach空間の閉凸部分集合となる．確率測度の収束をこのノルムによって定めた時，相対エントロピーの連続性に関して次の結果が知られている(cf.[1])：

定理2-3（下半連続性）．

$\{\mu_n\},\{\nu_n\}\subset M$，$\mu,\nu\in M$とし，$\|\mu_n-\mu\|\to 0$，$\|\nu_n-\nu\|\to 0$が成り立つ時，

$$S(\mu|\nu)\leqq\liminf_{n\to\infty}S(\mu_n|\nu_n)$$

が成立する．

更に各個連続性に関して，次の結果が示せる．

補題2-4．

$(\Omega,\mathcal{F})$を可算事象系，$\mu,\nu\in M$，$\{\nu_n\}\subset M$とし，$\|\nu_n-\nu\|\to 0$が成り立つ時，

$$S(\mu|\nu)=\liminf_{n\to\infty}S(\mu|\nu_n)$$

が成立する．

証明．任意の$\mathcal{A}\in P(\mathcal{F})$に対して，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{A\in\mathcal{A}}\mu(A)\cdot\log[\mu(A)/\nu_n(A)]=\sum_{A\in\mathcal{A}}\mu(A)\cdot\log[\mu(A)/\nu(A)]$$

の成立を示せばよい．確率測度の収束に関する条件より，任意の$A \in \mathfrak{A}$に対して，$\nu_n(A) - \nu(A) \to 0$であるから，$\mu(A)$及び$\nu(A)$の値に係わらず，

$$\lim_{n \to \infty} \mu(A) \cdot \log[\mu(A)/\nu_n(A)] = \mu(A) \cdot \log[\mu(A)/\nu(A)]$$

が成り立つ．これは，与式の成立を示す．

註．一般に，$(\Omega, \mathcal{F})$を可算事象系，$\mu, \nu \in M$，$\{\mu_n\} \subset M$とし，$\|\mu_n - \mu\| \to 0$が成立しても，

$$S(\mu \mid \nu) = \liminf_{n \to \infty} S(\mu_n \mid \nu)$$

が成立するとは限らない．

3．相対エントロピーの極値問題に対する均衡理論的定式化及び不動点定理の応用

この節の最初に，均衡点の存在証明に応用される不動点定理について述べる(cf.[3])：

定理3-1(Fanの不動点定理)．

Dを局所凸線形位相空間Eのコンパクト凸集合，RをDからDへの上半連続多価写像で，任意の$x \in D$に対して，Rxは空でない閉かつ凸なDの部分集合となるものとする．この時，$x_0 \in Rx_0$を満たす$x_0 \in D$が存在する．

$(\Omega, \mathcal{F})$を可算事象系，$M \supset D_1, D_2$をそれぞれ2人のプレイヤーが選択し得る確率測度の部分集合とし，利得関数を相対エントロピーとした時の両プレイヤーによる最小化問題を考える．即ち2人のプレイヤーがそれぞれD_1, D_2から確率測度μ_1, μ_2を選び出して，プレイヤー1は$S(\mu_1|\mu_2)$を最小化し，プレイヤー2は$S(\mu_2|\mu_1)$最小化するという問題を想定する．各プレイヤーの所有するエントロピー関数の値が，他のプレイヤーの選んだ確率測度にも依存して決定されるため両プレイヤーの選択の基準を与えるある種の均衡点を設定する事が意味を持つ．そこで，

$$S(\mu_{10}|\mu_{20}) = \min_{\mu_1 \in D_1} S(\mu_1|\mu_{20})$$
$$S(\mu_{20}|\mu_{10}) = \min_{\mu_2 \in D_2} S(\mu_2|\mu_{10})$$

を満たす確率測度の組$(\mu_{10}, \mu_{20}) \in D_1 \times D_2$が存在する場合，この組をNash均衡点(cf.[2])という．この時，次の定理が成立する．

定理3-1．

D_1及びD_2がそれぞれ全変動ノルムに関してコンパクトかつ凸なMの部分集合とした時，Nash均衡点が存在する．

証明．プレイヤー2が確率測度$\mu_2 \in D_2$を選択した時のプレイヤー1の反応関数$r_1(\mu_2)$，及びプレイヤー1が確率

測度$\mu_1 \in D_1$を選択した時のプレイヤー2の反応関数$r_2(\mu_1)$をそれぞれ次式で定義する：

$$r_1(\mu_2) = \{\mu_1 \in D_1 ; S(\mu_1 | \mu_2) = \min_{\nu_1 \in D_1} S(\nu_1 | \mu_2)\}$$

$$r_2(\mu_1) = \{\mu_2 \in D_2 ; S(\mu_2 | \mu_1) = \min_{\nu_2 \in D_2} S(\nu_2 | \mu_1)\}$$

D_1, D_2のコンパクト性及び相対エントロピーの同時下半連続性より任意の$\mu_1 \in D_1, \mu_2 \in D_2$に対して$r_1(\mu_2), r_2(\mu_1)$の値が共に空集合とならない事は明らか．そこで$D_1 \times D_2$から$D_1 \times D_2$への多価写像Rを，反応関数を用いて次式で定義する：

$$R(\mu_1, \mu_2) = r_1(\mu_2) \times r_2(\mu_1).$$

この時，RはM×Mのコンパクト凸な部分集合上で定義された上半連続多価写像となる．

(1). Rが凸集合値である事．

r_1及びr_2が，共に凸集合値である事を示せばよい．r_1についてのみ証明する．相対エントロピーの同時凸性より$\nu_1, \nu_2 \in r_1(\mu_2)$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$を満たす$\alpha_1, \alpha_2 \geqq 0$に対して，$\alpha_1 \nu_1 + \alpha_2 \nu_2 \in r_1(\mu_2)$を示す．

$$\begin{aligned}\min_{\rho \in D_1} S(\rho | \mu_2) &\leqq S(\alpha_1 \nu_1 + \alpha_2 \nu_2 | \mu_2) \\ &\leqq \alpha_1 S(\nu_1 | \mu_2) + \alpha_2 S(\nu_2 | \mu_2) \\ &= \min_{\rho \in D_1} S(\rho | \mu_2)\end{aligned}$$

故に，r_1は凸集合値である．

(2). Rが閉集合値である事.

r_1及びr_2が，共に閉集合値である事を示せばよい．r_1についてのみ証明する．即ち，$\{\nu_n\} \subset r_1(\mu_2)$，$\|\nu_n - \nu\| \to 0$とした時，$\nu \in r_1(\mu_2)$を証明する．相対エントロピーの下半連続性及び$\nu \in D_1$より，

$$\min_{\rho \in D_1} S(\rho \mid \mu_2) \leq S(\nu \mid \mu_2) \leq \liminf_{n \to \infty} S(\nu_n \mid \mu_2) = \min_{\rho \in D_1} S(\rho \mid \mu_2)$$

を得る．これはr_1が閉集合値である事を示す．

(3). Rが上半連続写像である事.

r_1及びr_2が，共に上半連続である事を示せばよい．r_1についてのみ証明する．即ち，$\|\mu_n - \mu\| \to 0$，$\nu_n \in r_1(\mu_n)$，$\|\nu_n - \nu\| \to 0$ならば$\nu \in r_1(\mu)$が成り立つ事を証明する．相対エントロピーの下半連続性及び補題2-4より，任意の$\rho \in D_1$に対して，

$$S(\nu \mid \mu) \leq \liminf_{n \to \infty} S(\nu_n \mid \mu_n) \leq \liminf_{n \to \infty} S(\rho \mid \mu_n) = S(\rho \mid \mu)$$

を得る．上式右辺のρをD_1の範囲で動かし，最小値を求める事により$\nu \in r_1(\mu)$を示せる．

上記Rに関する諸性質よりFanの不動点定理が適用可能で，ある$(\mu_{10}, \mu_{20}) \in D_1 \times D_2$が存在して，

$$(\mu_{10}, \mu_{20}) \in R(\mu_{10}, \mu_{20})$$

が成り立つ．これは

$$\mu_{10} \in r_1(\mu_{20}), \quad \mu_{20} \in r_2(\mu_{10})$$

と同値であり，結局(μ_{10}, μ_{20})がNash均衡点である事を示している．

謝辞

本稿を作製するに際し，有益な御指導を賜りました東京工業大学の高橋渉先生に感謝の念を申し述べさせて頂きます．

参考文献

[1]. 梅垣寿春，大矢雅則：確率論的エントロピー（情報理論の関数解析的基礎1），共立出版，1983．

[2]. 鈴木光男：ゲーム理論入門，共立出版，1981．

[3]. 高橋渉：非線形関数解析学（不動点定理とその周辺），近代科学社，1988．